Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa finală, Piteşti, 11 aprilie

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = AB$. Să se arate că $(AB - BA)^2 = 0_2$.

Subiectul 2. Dacă numerele reale a şi b $(a < b)$ sunt în imaginea unei funcţii continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, arătaţi că există un interval $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f(I) = [a, b]$.

Subiectul 3. Definim $H_n = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = 1\}$. Să se arate că există un număr finit de matrici $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care transformarea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dată de $f(x) = Ax$ are proprietatea $f(H_n) = H_n$:

a) pentru $n = 2$;

b) pentru orice $n \geq 3$.

Subiectul 4. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă f este derivabilă cu derivata continuă şi satisface relaţia

$$f(x + f'(x)) = f(x)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:

a) Dacă f are proprietatea $(\mathcal{P})$, atunci ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin o soluţie;

b) Există funcţii neconstante cu proprietatea $(\mathcal{P})$;

c) Dacă f are proprietatea $(\mathcal{P})$ şi ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin două soluţii, atunci f este o funcţie constantă.

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii